Zur Einheitenanalyse und geometrischen Deutung mathematischer und physikalischer Gleichungen

Volker Gensichen, FH Münster, FB Bauingenieurwesen

Meinem Kollegen Prof. Dr. rer. nat. Rüdiger Runge anlässlich des Endes seines langen, erfolgreichen Dekanats in schwieriger Zeit gewidmet.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Bilder

1 Einleitung

In der Mathematik ist es im Allgemeinen üblich, alle Fragen ohne die Berücksichtigung der Einheiten der verwendeten Größen zu behandeln. Wendet man dann die Gesetze und Ergebnisse auf Probleme der Physik und der Ingenieurwissenschaften an, so ergeben sich in vielen Fällen hinsichtlich der Einheitenanalyse und der geometrischen Deutung Widersprüche.

Da für den Physiker und den Ingenieur die Einheitenanalyse ein besonders vielseitiges Werkzeug darstellt, muss dieser Bereich widerspruchsfrei und klar aufgebaut werden. Im folgenden wird der Versuch unternommen, die formalen Widersprüche anhand einiger einfacher Beispiele anschaulich herauszustellen und zu klären, ob eine einheitenfreie Darstellung die Probleme lösen kann.

2 Einheiten: Bezeichnungen und Grundgesetze

Die Einheitenanalyse (allgemeiner: Dimensionsanalyse) und das Rechnen mit Einheiten sind in DIN 1313: Größen (12/1998) geregelt. Die recht komplizierten Zusammenhänge werden im Folgenden vereinfacht wiedergegeben, wobei aus praktischen Gründen auch Abweichungen von DIN 1313 in Kauf genommen werden.

Bezeichnungen (gemäß DIN 1313):

Die Einheit einer physikalischen Größe G wird durch die in eckige Klammern eingeschlossene Größe gekennzeichnet,

$$\text{Physikalische Größe } G : \quad [G] = \text{Einheit von } G . \tag{2.1}$$

Das Formelzeichen einer physikalischen Größe wird *kursiv* gesetzt. Hingegen werden die Zeichen für die Dimensionen (z. B. Länge L und Kraft K) sowie für die Einheiten (z. B. m für Meter und N für Newton) mit geraden Buchstaben gedruckt, z. B.:

$$\text{Fläche } A_0 \text{, gemessen in } \mathrm{m}^2 \quad \rightarrow \quad [A_0] = [\text{Länge}^2] = [\mathrm{L}^2] = \mathrm{m}^2$$

$$\text{Kraft } F_1 \text{, gemessen in kN} \quad \rightarrow \quad [F_1] = \underbrace{[\text{Kraft}] = [\mathrm{K}] = \mathrm{kN}}$$

kursiv gerade lies: „ Einheit der Kraft = Kilonewton "

Dieser Formalismus erscheint zunächst etwas umständlich, erweist sich aber für das Folgende (und allgemein auch für jede wissenschaftlich-technische Darstellung) als eminent praktisch.

Die 3 Grundgesetze (und die wichtigsten Kontrollen!):

1. **Einheit der linken Seite = Einheit der rechten Seite**
   einer Gleichung
2. **Jeder Summand muss die gleiche Einheit aufweisen**
3. **Argumente und Ergebnisse transzendenter Funktionen sowie Exponenten haben die Dimension 1**
   (sind „dimensionslos", „einheitenfrei")

(2.2 a – c)

Einheiten der Ableitung und des Integrals einer Funktion

Die Differenz ΔG einer Größe G hat gemäß (2.2 b) die gleiche Einheit wie die Größe selbst; dies gilt auch für ihre infinitesimal kleine Differenz dG. Hieraus folgt für die Funktion $y = f(x)$ unmittelbar

$$[dx] = [\Delta x] = [x] \quad \text{sowie} \quad [dy] = [\Delta y] = [y] \qquad (2.3\text{ a})$$

und für die Ableitungen

$$[y'] = \frac{[y]}{[x]}, \quad [y''] = \frac{[y]}{[x]^2}, \; \ldots, \; \text{allg. für die n. Ableitung:} \quad [y^{(n)}] = \frac{[y]}{[x]^n} \qquad (2.3\text{ b})$$

Entsprechend gilt für das Integral einer Funktion (Das Integralzeichen ist als Symbol für die Summation einheitenfrei.) :

$$[\textstyle\int y\,dx] = [y]\cdot[x] \qquad (2.4)$$

Aus den Gln 2.2 – 2.4 ergeben sich weitreichende Schlussfolgerungen für den (physikalischen) Sinn bzw. Unsinn mathematischer Ausdrücke und Gleichungen und deren Kontrolle. Im Folgenden werden hierzu einige anschauliche Beispiele angeführt.

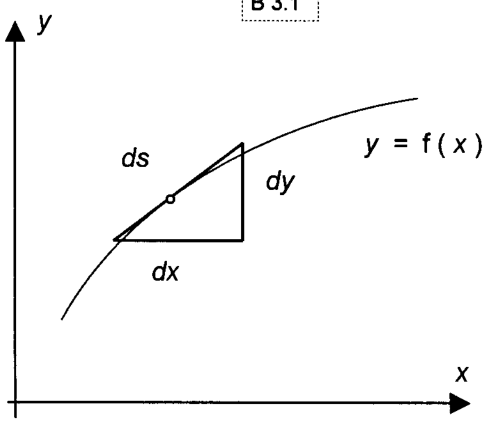
3 Zur physikalischen Aussagekraft mathematischer Ausdrücke und Gleichungen

Die Einheitenanalyse ermöglicht es nicht nur, Fehler in der Struktur von Gleichungen aufzudecken. Gleichzeitig wird die Frage, ob mathematische Operationen (z. B. im Zusammenhang mit der Differentiation und Integration) sowie deren geometrische oder physikalische Deutung überhaupt möglich sind, *grundsätzlich* beantwortet. Diese Zusammenhänge werden im Folgenden an einigen einfachen Beispielen aus dem Bauingenieurwesen und der Statistik erläutert.

Beispiel 3.1 : Bogenlänge einer Kurve (z. B. Berechnung der Länge einer Straße)

Dieses Beispiel ist von grundlegender Bedeutung für viele weitere Fragestellungen aus der Physik und dem Ingenieurwesen. Ausgangspunkt ist der Zusammenhang zwischen den differentiellen Größen dx, dy und dem Zuwachs ds der Bogenlänge s (Bild 2.1)

B 3.1



Nach Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2 \\ &= (1 + y'^2)\, dx^2 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Wegen (2.2 b) kann die Gleichung 3.1 nur aufgestellt werden, wenn die Einheit von y gleich der Einheit von x ist: $[y] = [x]$. Anderenfalls ist sie mathematisch „grob" falsch, und sie hat gleichzeitig a priori keinen irgendwie gearteten physikalischen Sinngehalt!

Besonders zu beachten ist der Term $(1 + y'^2)$ in der dritten Form der Gleichung, der in zahlreichen Aufgabenstellungen vorkommt. Der erste Summand, die 1, entsteht durch die Division von dx^2 / dx^2, ist somit also (unabhängig von der Einheit von x und y) stets einheitenfrei. Hieraus folgt, dass auch der zweite Summand y'^2 in Zusammenhang mit diesem Term stets einheitenfrei sein muss; es gilt also:

$$\text{Term } (1 + y'^2) \quad \Rightarrow \quad [y'] \overset{!}{=} 1\,, \quad [x] \overset{!}{=} [y] \tag{3.2}$$

(Anm. zum Zeichen $\overset{!}{=}$: Dieses Zeichen steht für „. . muss gleich sein . . ")

Die Bogenlänge s einer Kurve $y = f(x)$ ergibt sich zu

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

Die Berechnung der Länge einer Straße ist wegen $[x] = [y] = [L]$ (= m oder km, z.B.) selbstverständlich ohne Probleme möglich (und auch sinnvoll).

Die Länge eines Kurvenstücks z. B. einer Spannungs-Dehnungslinie oder einer Kraft-Verformungskurve zu berechnen ist weder (rein mathematisch gesehen) möglich noch in irgend einer Weise sinnvoll.

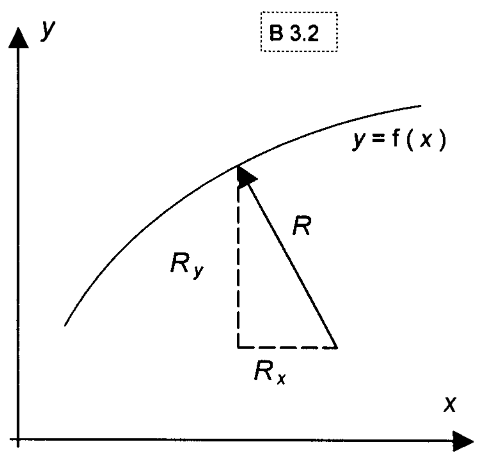
Entsprechendes gilt für die Berechnung der Krümmung und des Krümmungsradius einer Kurve, wenn die Variablen x und y ungleiche Einheiten aufweisen (s. nächstes Beispiel).

Beispiel 3.2 : Krümmung und Krümmungsradius einer Kurve (vgl. auch Bsp. 4.1)

Für die Krümmung K und den Krümmungsradius R einer Kurve gilt :

$$K = \frac{1}{R} = \frac{y''}{\left|\sqrt{(1 + y'^2)^3}\right|} \tag{3.3}$$

Da unter der Wurzel der Term $(1 + y'^2)$ steht, gilt (3.2) mit den zugehörigen Folgerungen.



Aus Bild 3.2 ist auch nochmals anschaulich sofort zu erkennen, dass für den Fall *ungleicher* Einheiten von x und y der Krümmungsradius nicht berechnet werden kann; denn es gilt nach Pythagoras

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \tag{3.4}$$

Wegen (2.2 b) ist diese Gleichung nur richtig, wenn die Einheit von R_x gleich der Einheit von R_y ist. Da andererseits aus Bild 3.2

$$[R_x] = [x] \quad \text{und} \quad [R_y] = [y]$$

abzulesen ist, müssen auch die Einheiten von x und y übereinstimmen.

Diese Überlegungen können direkt auf die

<u>Einheitenbetrachtungen für VEKTOREN</u>

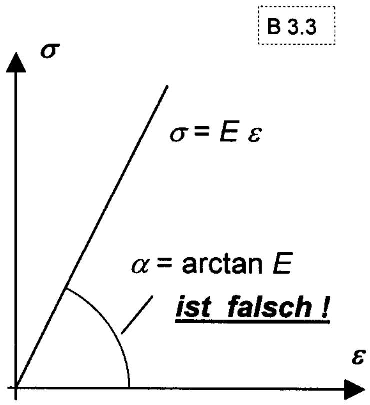
übertragen werden.

Beispiel 3.3 : Deutung der ersten Ableitung y' als Tangens des Steigungswinkels α

Die Deutung von y' als $\tan \alpha$ wird häufig mit Vorteil bei der anschaulichen Herleitung des Differentialquotienten verwendet. Hierbei wird jedoch fast immer versäumt darauf hinzuweisen, dass dieses Vorgehen nur richtig ist, wenn x und y die gleiche Einheit aufweisen; denn es gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{mit} \quad [y'] = \frac{[y]}{[x]} \tag{3.5}$$

Soll y' als Tangens des Steigungswinkels α gedeutet werden, so muss wegen des „Grundgesetzes" (2.2 c) y' einheitenfrei sein, mithin die Einheit von x und y übereinstimmen. In allen anderen Fällen ist diese anschauliche Deutung unzulässig und sinnlos.



In Bild 3.3 ist die in fast allen Lehrbüchern der Technischen Mechanik angeführte Angabe „ arctan E " für den Steigungswinkel der Hookeschen Geraden dargestellt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma' = E = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan E \tag{3.6}$$

Diese Angabe ist wegen (2.2 c) falsch und ohne jeden Sinngehalt, da das Argument E der transzendenten Arctan-Funktion mit der Einheit K / L^2 behaftet ist. Auch hier sind wieder die Einheiten der beiden Variablen σ und ε ungleich:

$$[\sigma] = [K/L^2] \quad \neq \quad [\varepsilon] = [1] \text{ (einheitenfrei)}.$$

Zur Veranschaulichung der Unsinnigkeit der Beziehung $\alpha = \arctan E$ wird sie für den E-Modul von Stahl ausgewertet:

$$E = 2{,}1 \cdot 10^{4}\ \text{kN/cm}^2 \qquad \alpha = 1{,}57 \quad (89{,}99°)$$
$$E = 2{,}1 \cdot 10^{-1}\ \text{MN / mm}^2 \qquad \alpha = 0{,}21 \quad (11{,}9°)$$

Wie zu erwarten, ergeben sich völlig beliebige Resultate, je nachdem, welche Einheit für den E-Modul gewählt wird.

(Hierzu noch eine ergänzende Anmerkung: Werden die Hookeschen Geraden für zwei verschiedene Werkstoffe zusammen in einem Diagramm dargestellt, so kann man selbstverständlich der steileren Geraden den größeren E-Modul zuordnen; diese Zuordnung ist jedoch trivial.)

Wird statt der Hookeschen Geraden z. B. die Steigung einer Straße im Längsschnitt betrachtet, so erhält man sinnvolle und wiederspruchsfreie Ergebnisse für den Steigungswinkel.

<u>Anmerkung zur Ermittlung von Extrema und zur Einheit der Null</u>

Zur Berechnung von Extremwerten einer Funktion wird die Bedingung $y' = 0$ ausgewertet. Dieses Vorgehen funktioniert offensichtlich auch bei Funktionen, deren Variablen x und y beliebige, auch unterschiedliche Einheiten aufweisen. Die erste Ableitung ist dann nicht mehr einheitenfrei. Trotzdem kann $y' = 0$ exakt dem Winkel $\alpha = 0$ zugeordnet werden. Hinsichtlich der Einheiten verhält sich die Null wie ein Chamäleon: Sie passt sich stets ihrer Umgebung an, kann gleichzeitig als einheitenbehaftet und einheitenfrei gedeutet werden (vgl. auch Vektorrechnung: Der Nullvektor hat den Betrag Null, jedoch keine oder auch jede beliebige Richtung).

Beispiel 3.4 : Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

Beispiel: $y = \sin x$. Die Reihenentwicklung für die Sinus-Funktion an der Stelle $x = 0$ lautet

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{3.7}$$

Da jeder Summand der Reihe eine andere Potenz der Variablen x aufweist, muss wegen (2.2 b) diese Variable einheitenfrei sein. Die Reihe darf also nicht für Winkel in der Einheit Grad, sondern nur im einheitenfreien Bogenmaß ausgewertet werden.

Wegen (2.2 a) muss die linke Seite jeder Reihenentwicklung ebenfalls einheitenfrei sein. Hieraus folgt, dass für die Reihenentwicklung eines einheitenbehafteten Terms zunächst ein geeigneter einheitenbehafter Faktor abzuspalten ist und die Entwicklung dann für den verbleibenden einheitenfreien Rest durchzuführen ist.

Anmerkung zur Ermittlung der trigonometrischen Funktionen im PC und im TR

Wegen der häufig zu beobachtenden Unsicherheit bei der Berechnung der Funktionswerte hinsichtlich der Voreinstellung des Taschenrechners (TR) auf Grad oder Bogenmaß soll hier nochmals klargestellt werden, was im TR bzw. PC beim Aufruf der trigonometrischen Funktionen abläuft:

1. Der gesuchte Wert (z. B. $\sin x = ?$) kann grundsätzlich nur für x – Werte in einheitenfreier Form, also im Bogenmaß, aus den Reihenentwicklungen berechnet werden.
2. Ist der TR auf Alt- oder Neugrad voreingestellt, so erkennt der Rechner anhand dieser Voreinstellung, dass der eingegebene Winkel rechner-intern erst in das Bogenmaß umgerechnet werden muss; erst danach wird die Reihe ausgewertet.
3. Ist der Rechner auf das Bogenmaß voreingestellt, wird der eingegebene x – Wert direkt (also ohne Umrechnung) in die Reihe eingesetzt.

Die Voreinstellung entscheidet also darüber, ob der Eingabewert rechner-intern mit dem Umrechnungsfaktor $\pi / 180°$ bzw. $\pi / 200^g$ multipliziert wird oder nicht.

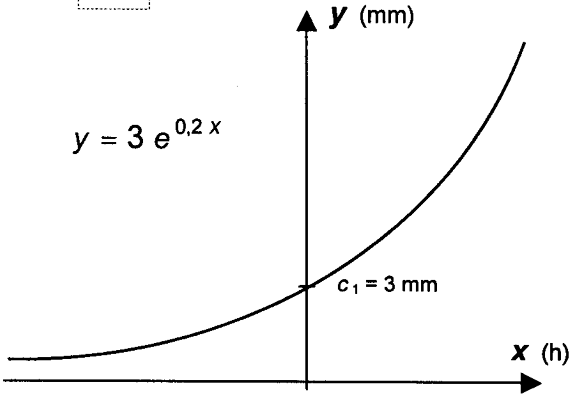
4 Kann eine einheitenfreie Formulierung das Problem lösen?

Aus den Beispielen 3.1 bis 3.3 wird ein Grundproblem deutlich: Bei Variablen x und y , die unterschiedliche Einheiten aufweisen, ist die Ableitung einheitenbehaftet. Im folgenden Beispiel soll untersucht werden, ob dieses Problem durch eine geeignete Überführung in eine einheitenfreie Formulierung (also eine entsprechende Normierung) gelöst werden kann.

Beispiel 4.1 a : Berechnung des Scheitels einer Kurve / Wachstum einer Pflanze nach dem Wachstumsgesetz

$$y = c_1\, e^{c_2 x} \tag{4.1}$$

B 4.1



mit y = Höhe der Pflanze (in mm)
x = Zeit (in h)
c_1 = 3 mm (Höhe zum Zeitpunkt $x = 0$)
c_2 = 0,2/h (Wachstumskonstante).

Da die Einheiten von x und y nicht übereinstimmen, ist die Ableitung y' einheitenbehaftet. Es ist somit von vorn herein unsinnig und mathematisch falsch, die Krümmung K zu berechnen.

Um die letzten Zweifel an dieser Aussage zu beseitigen, wird im Folgenden der (a priori zum Scheitern verurteilte) Versuch unternommen, durch Überführung der Funktion in eine einheitenfreie Form die Lage und den Wert der maximalen Krümmung K_{max} zu berechnen.

Die Normierung der Funktion unterliegt nur der Bedingung, dass sie zu einer einheitenfreien Form der Funktionsgleichung führt. Welche Bezugsgrößen gewählt werden, ist ansonsten beliebig.

Es werden zwei unterschiedliche Normierungen durchgerechnet. Wenn die Aussage richtig ist, dass die Berechnung der Krümmung unsinnig ist, müssten sich aus der Rücktransformation in die einheitenbehaftete Form unterschiedliche Werte für Lage und Wert der maximalen Krümmung ergeben (und umgekehrt).

<u>Normierung 1:</u> $\bar{x} = c_2\, x = 0{,}2\, x \;;\quad \bar{y} = \dfrac{y}{c_1} = \dfrac{y}{3}$ (mm, h)

(beide Koordinaten sind somit einheitenfrei)

Einheitenfreie Form der Funktionsgleichung: $\bar{y} = e^{\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{K} = \dfrac{e^{\bar{x}}}{(1+e^{2\bar{x}})^{3/2}}$

Aus der Bedingung $d\bar{K}/d\bar{x} = 0$ ergibt sich die maximale Krümmung zu

$$\bar{K}_{max} = 0{,}385 \quad \text{an der Stelle } \bar{x}_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -0{,}347$$

Rücktransformation auf die physikalische Koordinate x_0 :

$$\underline{x_0} = \frac{\bar{x}_0}{c_2} = \frac{-0{,}347}{0{,}2} = \underline{-1{,}73\text{ h}}$$

<u>Normierung 2:</u> $\tilde{x} = 2c_2\, x = 0{,}4\, x \;;\quad \tilde{y} = \dfrac{y}{2c_1} = \dfrac{y}{6}$

Einheitenfreie Form der Funktionsgleichung: $\tilde{y} = \dfrac{1}{2}e^{\tilde{x}/2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{K} = \dfrac{e^{\tilde{x}}}{8(1+\dfrac{1}{16}e^{\tilde{x}})^{3/2}}$

mit der maximalen Krümmung $\tilde{K}_{max} = 0{,}193$ an der Stelle $\tilde{x}_0 = 2{,}08$.

Rücktransformation auf die physikalische Koordinate x_{02} :

$$\frac{\tilde{x}_0}{2c_2} = \frac{2{,}08}{2\cdot 0{,}2} = \boxed{x_{02} = 5{,}20\text{ h} \;\neq\; x_{01} = -1{,}73\text{ h}}$$

(Ergebnis der 1. Normierung)

<u>Zusammenfassung</u>:

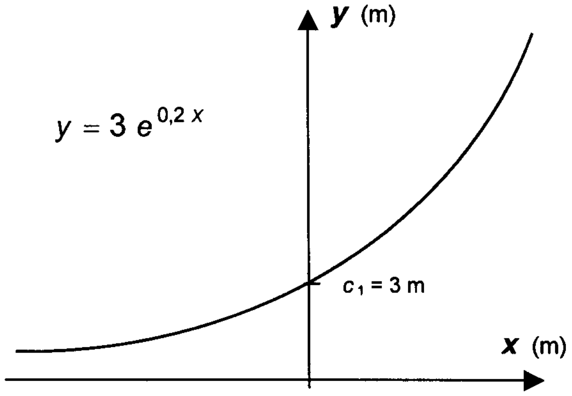
Die Umformung der Funktionsgleichung auf eine einheitenfreie Form kann das Problem der Berechnung des Scheitelpunktes einer Kurve, deren Variablen unterschiedliche Einheiten aufweisen, nicht beseitigen. Die Ergebnisse sind unsinnig; sie sind nicht rücktransformierbar, und es gibt für Normierung und Renormierung kein objektives Kriterium.

Auch bei diesem Beispiel erweist sich, dass die Einheitenanalyse sofort erkennen lässt, ob die Problemstellung überhaupt zulässig und eine Lösung möglich ist.

Beispiel 4.1 b : Berechnung des Scheitels einer Kurve / Verlauf einer Straße im Grundriss

Zum unmittelbaren Vergleich mit Beispiel 3.1a wird angenommen, dass die Straße formal identisch zur Gl 4.1 abgesteckt wurde. Allerdings müssen die Konstanten c_1 und c_2 hinsichtlich ihrer Einheiten an die neue Aufgabenstellung angepasst werden. Gegeben sei:

B 4.2



$$y = c_1\, e^{c_2 x} \; . \qquad (4.2)$$

mit x, y = Koordinaten (in m)
c_1 = 3 m (Achsenabschnitt auf der y - Achse)
c_2 = 0,2 / m

Da im Unterschied zum Beispiel 4.1a hier die Variablen x und y gleiche Einheiten aufweisen, ist die Berechnung des Scheitels eine lösbare und sinnvolle Aufgabe. Anschaulich gesehen soll derjenige Punkt ermittelt werden, an dem beim Durchfahren der Straße der Lenkradeinschlag maximal wird.

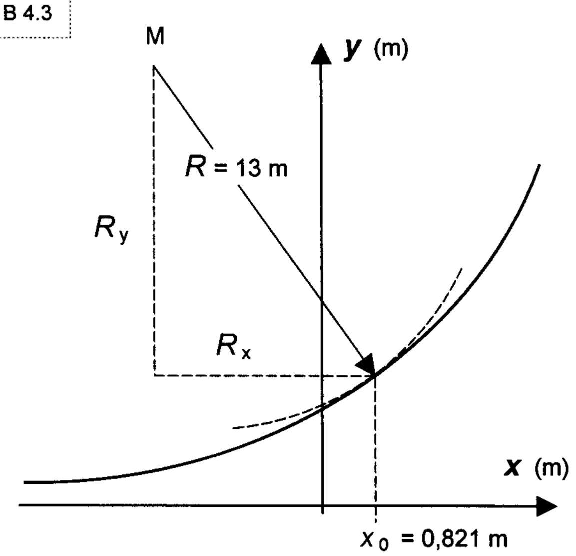
Berechnung mit der einheitenbehafteten Form von (4.2):

$$y = 3e^{0,2x} \;\Rightarrow\; y' = 0,6e^{0,2x} \;;\; y'' = 0,12\,e^{0,2x} \;;\; K = \frac{0,12\,e^{0,2x}}{(1+0,36e^{0,4x})^{3/2}}$$

Aus der Bedingung $dK/dx = 0$ ergibt sich die maximale Krümmung

$$K_{max} = 0,077/\mathrm{m} \quad \text{an der Stelle } x_0 = 0,821\,\mathrm{m}.$$

B 4.3



Der zugehörige (minimale) Krümmungsradius

$$R_{min} = 1/K_{max} = 1/0,077 = 13,0\ \mathrm{m}.$$

Dieser Radius und seine physikalischen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen sind in Bild 4.3 (nicht maßstäblich) dargestellt. Alle Größen haben die Einheit der Länge.

Zusätzlich sind der Schmiegekreis in x_0 und dessen Mittelpunkt M eingetragen.

Aus den Berechnungen und Überlegungen zu Beispiel 4.1a geht hervor, dass jeder Versuch, die gegebene physikalische Gleichung 4.2 zu transformieren (auch in eine einheitenfreie Form; z. B. mit Hilfe der beiden Normierungen aus Beispiel 4.1a) und dann den Scheitelpunkt zu berechnen, unzulässig ist und zu fiktiven Ergebnissen führt.

Beispiel 4.2: Lineare Regression

Eine Regressionsgerade wird häufig mit Hilfe des Gaußschen Fehlerquadratprinzips berechnet. Hierbei wird die Summe der Fehlerquadrate zunächst in x – Richtung, anschließend in y – Richtung minimiert. Aus diesen Bedingungen ergeben sich die folgenden beiden Regressionsgeraden

$$\text{Gerade } g_y: \quad y = a_y\, x + b_y \tag{4.3 a}$$

$$\text{Gerade } g_x: \quad x = a_x\, y + b_x \tag{4.3 b}$$

Der Korrelationskoeffizient

$$r = \sqrt{a_y\, a_x} \quad \left(= \sqrt{\tan\alpha\, \tan\beta}\,\right) \tag{4.4}$$

gibt an, wie gut diese beiden Geraden übereinstimmen. Für $r = \pm\, 1$ sind die Geraden deckungsgleich. Für $r = 0$ stehen sie senkrecht aufeinander, d. h. es gibt keinen statistisch begründeten funktionalen Zusammenhang zwischen x und y.

Wie aus den vorangegangenen Überlegungen folgt (vgl. Bsp. 3.3), ist die Deutung der Steigungen a_y und a_x als Tangens des Steigungswinkels der beiden Geraden nur für den Fall zulässig, dass die Einheiten von x und y übereinstimmen. Aus diesem Grund ist der zweite Term in (4.4) eingeklammert.

Im Allgemeinen wird angenommen, dass bei dem Datensatz x_i , y_i die Variable x die unabhängige und y die abhängige ist. Aus diesem Grund wird dann nur die Gerade g_y explizit berechnet und weiterverwendet, während von der Geraden g_x nur der Faktor a_x zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten r gemäß (3.4) interessiert.

In dem folgenden Beispiel 4.2 a wird ein (möglichst einfacher) Datensatz „konventionell" nach der oben beschriebenen Vorgehensweise auf seine Transformierbarkeit untersucht. Im Beispiel 4.2 b wird angenommen, dass die Variablen x und y , somit auch die Geraden g_y und g_x „gleichberechtigt" sind. Zur Berechnung der Regressionsgeraden wird deshalb eine andere Methode ausprobiert, wobei wieder die Frage der Renormierung (der Rücktransformation) unter dem Blickwinkel der Einheitenanalyse im Vordergrund steht.

(Forts. ⇒)

Beispiel 4.2 a: Lineare Regression („konventionell" nach dem Gaußschen Fehlerquadrat-Prinzip)

Für die Untersuchungen wird ein möglichst einfacher Datensatz verwendet, sodass die Berechnungen „von Hand" nachvollziehbar sind.

Tab. 4.1: Urliste

X_i (m)	Y_i (kg)
4	10
7	14,5
10	13

Gegeben sind die einheitenbehafteten Daten nach Tab. 4.1. Sie können z. B. als Zuordnung des Gewichts von Riesenschlangen zu ihrer Länge gedeutet werden. Zu untersuchen ist die Korrelation, und zwar in einheitenbehafteter und einheitenfreier Form.

Zunächst wird eine zweite einheitenbehaftete Liste erstellt, deren Daten auf den Schwerpunkt S der Urliste bezogen werden. Die Koordinaten X_S und Y_S sind

$$X_S = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{4+7+10}{3} = 7\ \mathrm{m}\ ;\quad Y_S = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{10+14{,}5+13}{3} = 12{,}5\ \mathrm{kg}$$

Tab. 4.2: Daten, auf S bezogen

x_i (m)	y_i (kg)
− 3	− 2,5
0	2
3	0,5

Für die neuen, auf den Schwerpunkt S bezogenen Daten x_i und y_i gilt

$$x = X - X_S \quad ; \quad y = Y - Y_S \tag{4.5}$$

(s. Tab. 4.2).

Für die weiteren Vergleichsrechnungen werden die Daten der Liste 4.2 in zwei verschiedene einheitenfreie Listen umgerechnet. Mit

$$\overline{x} = \frac{x}{\max|x|} = \frac{x}{3} \quad ; \quad \overline{y} = \frac{y}{\max|y|} = \frac{y}{2{,}5} \tag{4.6}$$

Tab. 4.3: Einheitenfreie Daten, nach (4.6)

$\overline{x}_i$ [1]	$\overline{y}_i$ [1]
− 1	− 1
0	0,8
1	0,2

ergeben sich die Daten der Liste 4.3 und mit

$$\tilde{x} = \frac{\overline{x}}{2} = \frac{x}{6} \quad ; \quad \tilde{y} = 2\overline{y} = 0{,}8\,y \tag{4.7}$$

die in der Liste 4.4 zusammengestellten Daten.

Tab. 4.4: Einheitenfreie Daten, nach (4.7)

$\tilde{x}_i$ [1]	$\tilde{y}_i$ [1]
− 0,5	− 2
0	1,6
0,5	0,4

<u>Berechnung der Regressionsgeraden und der Korrelation</u>

Die einzelnen Rechenschritte werden hier nicht dargestellt. Für die Geraden ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Liste 4.1:} & G_Y: & Y = 0{,}5\,X + 9 \\ & G_X: & X = 0{,}857\,Y - 3{,}71 \\ \text{Liste 4.2:} & g_y: & y = 0{,}5\,x \\ & g_x: & x = 0{,}857\,y \end{array}\right\} \text{einheitenbehaftet (m, kg)}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Liste 4.3:} & g_{\overline{y}}: & \overline{y} = 0{,}6\,\overline{x} \\ & g_{\overline{x}}: & \overline{x} = 0{,}714\,\overline{y} \\ \text{Liste 4.4:} & g_{\tilde{y}}: & \tilde{y} = 2{,}4\,\tilde{x} \\ & g_{\tilde{x}}: & \tilde{x} = 0{,}179\,\tilde{y} \end{array}\right\} \text{einheitenfrei}$$

In allen 4 Fällen beträgt der Korrelationskoeffizient <u>r = 0,655</u> .

<u>Ergebnis:</u> Alle drei Transformationen führen erwartungsgemäß zu den gleichen Ergebnissen, da sämtliche Rechenschritte in *x*- und *y*- Richtung streng getrennt durchgeführt wurden. Die 6 Geradengleichungen g können mit Hilfe der Gln 4.5 – 4.7 auf die zur Urliste gehörenden Regressionsgeraden G_Y und G_X rücktransformiert werden.

Beispiel 4.2 b: Lineare Regression („neue Methode")

Die „konventionelle" Regressionsberechnung führt zu zwei Geradengleichungen, g_y und g_x, wobei die Gerade g_y als $y = f(x)$ als „bevorzugtes" Resultat gilt. Diese Deutung ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn aus der Problemstellung x als unabhängige und y als abhängige Variable eindeutig zu identifizieren sind.

Häufig sind die Verhältnisse jedoch so, dass beide Variablen (z. B. im Bsp. 4.4a , in dem x für die Länge und y für das Gewicht einer Schlange steht) gleichberechtigt als Ausgangsgröße angesehen werden können, der dann die andere Größe zugeordnet ist.

In beiden Fällen stellt sich die Frage nach einer Mittelbildung der beiden berechneten Regressionsgeraden und einem objektiven Kriterium für eine solche Mittelung.

Im Folgenden wird ein völlig anderer Weg versucht: Statt der Berechnung zweier Geraden unter der Bedingung, dass die Summe der Fehlerquadrate einmal in x- , dann in y- Richtung minimiert wird, soll nur eine einzige Gerade aus der Bedingung berechnet werden, dass die

Summe der Fehlerquadrate _senkrecht zur Regressionsgeraden_

minimal wird. Die beiden Methoden sind (unter Verwendung der Daten nach Tab. 4.2, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Einheiten von x und y übereinstimmen, dass z. B. beide Größen in Metern gemessen wurden) in den Bildern 4.4b gegenübergestellt (s. nächste Seite).

Aufgrund der Überlegungen zu den Bildern 3.1 und 3.3 wird sofort deutlich, dass eine solche Vorgehensweise nur möglich ist, wenn die Einheit von x gleich der Einheit von y ist. Infolge dieses Zwanges wäre die Anwendungsmöglichkeit der „neuen" Methode stark eingeschränkt.

Deshalb wird versucht, die Methode mit Hilfe der Transformation der Daten in eine einheitenfreie Form für Daten mit beliebigen Einheiten zu verallgemeinern. Nach den Untersuchungen des Kap. 3 ist zu erwarten, dass die Rücktransformation auf die einheitenbehafteten Daten der Urliste nicht möglich ist, da die Fehlergröße senkrecht zur Regressionsgeraden zwei Komponenten mit unterschiedlichen Einheiten aufweist. Zur Verdeutlichung wird jedoch wieder eine Beispielrechnung durchgeführt.

Für die Berechnungen wird für die (einheitengleich gedachten) Daten der Tab. 4.2 und die einheitenfreien Daten der Tab. 4.3 und 4.4 zurückgegriffen. Die Berechnung kann auf das dem Bauingenieur vertraute Problem zurückgeführt werden, für einen aus mehreren Punkten gleicher Fläche bestehenden Querschnitt die Lage der Hauptachsen zu berechnen.

Für die Daten der Tab. 4.1 gilt:

$$I_x = \sum y^2 = (-2{,}5)^2 + 2^2 + 0{,}5^2 = 10{,}5 \;;\; I_y = \sum x^2 = (-3)^2 + 0^2 + 3^2 = 18$$

$$I_{xy} = \sum x\,y = (-3)\cdot(-2{,}5) + 0\cdot 2 + 3\cdot 0{,}5 = 9$$

$$\underline{\alpha_0} = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2\,I_{xy}}{I_y - I_x} = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2\cdot 9}{18 - 10{,}5} = 0{,}588 \mathrel{\hat{=}} \underline{33{,}7^\circ} \;;\; \tan\alpha = 0{,}667$$

$$\boxed{g_1:\quad y = 0{,}667\,x}$$ (s. Bild 4.4 b)

Entsprechend erhält man für die Daten nach

Tab. 4.3:

$$I_{\bar{x}} = 1{,}68 \;;\; I_{\bar{y}} = 2 \;;\; I_{\bar{x}\bar{y}} = 1{,}2$$

$$\underline{\alpha_0 = 41{,}2^\circ \;;\; \tan\alpha_0 = 0{,}876}$$

$$\boxed{\bar{g}:\; \bar{y} = 0{,}876\,\bar{x}}$$

Tab. 4.4:

$$I_{\tilde{x}} = 6{,}66 \;;\; I_{\tilde{y}} = 0{,}5 \;;\; I_{\tilde{x}\tilde{y}} = 1{,}2$$

$$\underline{\alpha_0} = 90^\circ - 10{,}6^\circ = \underline{79{,}4^\circ} \;;\; \tan\alpha_0 = 5{,}34$$

$$\boxed{\tilde{g}:\; \tilde{y} = 5{,}34\,\tilde{x}}$$

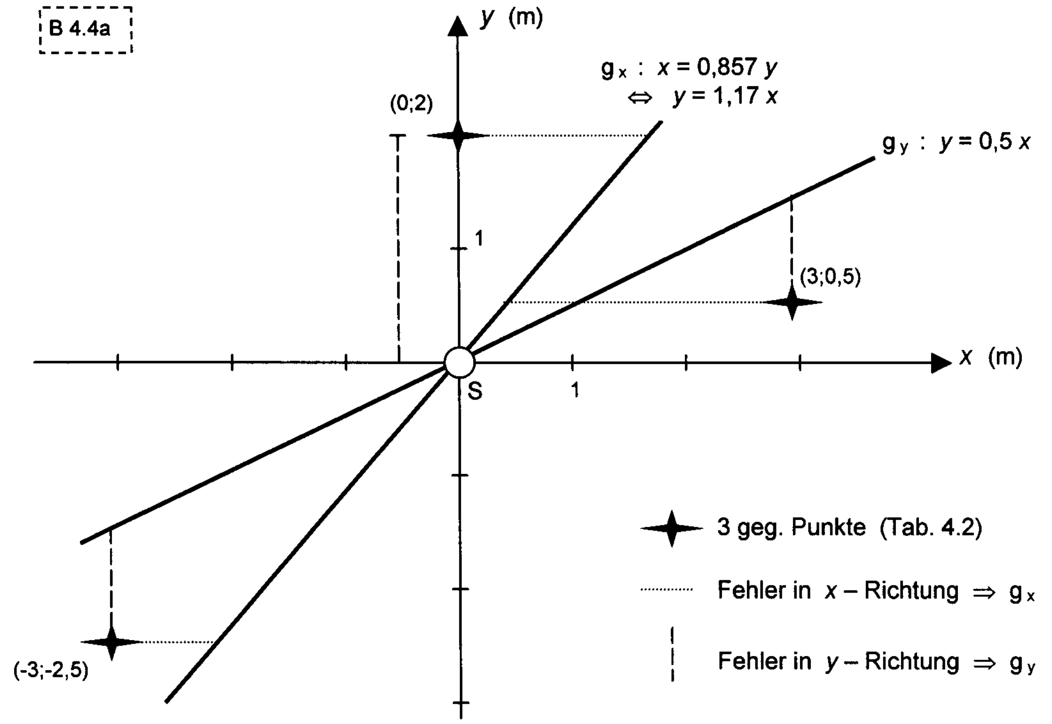


Bild 4.4 a: „Konventionelle“ Methode: Berechnung der Regressionsgeraden mit Hilfe des Gaußschen Fehlerquadratprinzips, getrennt nach x- und y- Richtung

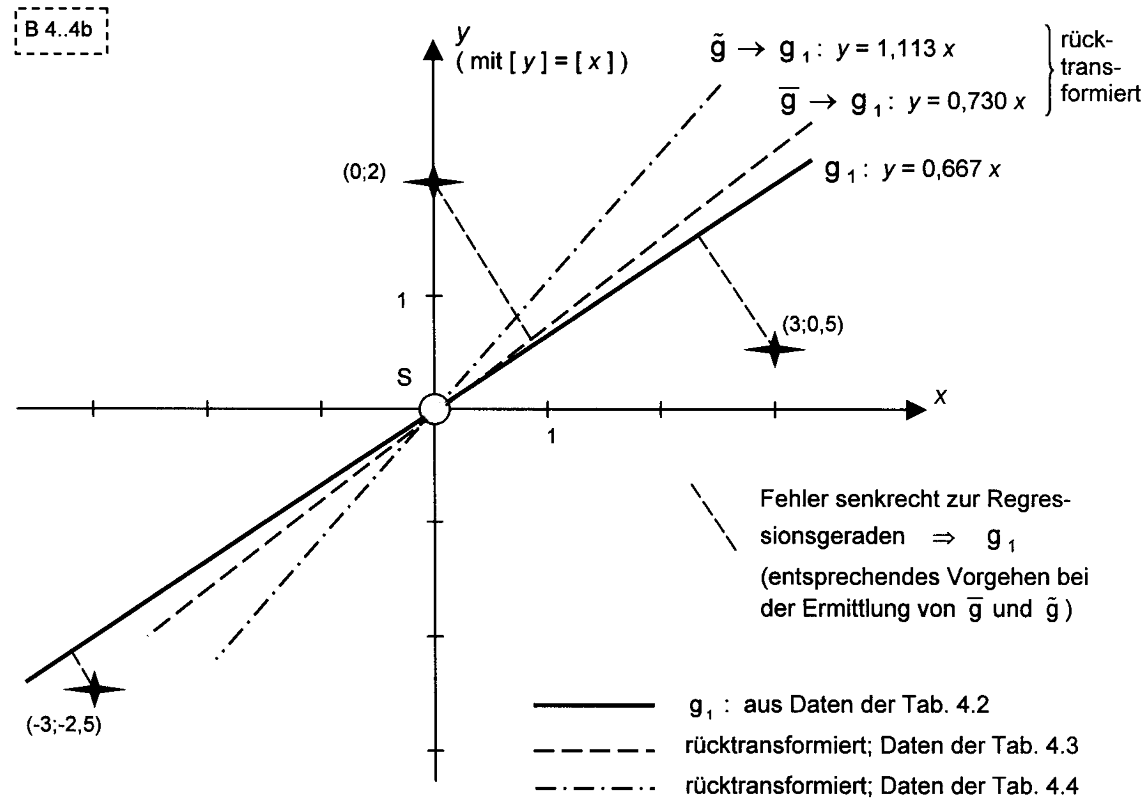


Bild 4.4b: „Neue“ Methode: Berechnung der Regressionsgeraden mit Hilfe des Gaußschen Fehlerquadratprinzips, jedoch senkrecht zur Richtung der Regressionsgeraden; renormierte Regressionsgeraden.

Rücktransformation:

Die drei zu vergleichenden Geraden sind

$$g_1: \quad y = 0{,}667\,x$$

$$\bar{g}: \quad \bar{y} = 0{,}876\,\bar{x} \qquad \text{mit } \bar{x} = \frac{x}{3}\,;\; \bar{y} = \frac{y}{2{,}5}$$

$$\tilde{g}: \quad \tilde{y} = 5{,}34\,\tilde{x} \qquad \text{mit } \tilde{x} = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{x}{6}\,;\; \tilde{y} = 2\bar{y} = 0{,}8\,y$$

Die Rücktransformationen liefern

$$\bar{g} \to g_1: \quad \frac{y}{2{,}5} = 0{,}876\,\frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{0{,}730}_{\neq 0{,}667}\,x$$

$$\tilde{g} \to \bar{g}: \quad 2\bar{y} = 5{,}34\,\frac{\bar{x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \underbrace{1{,}335}_{\neq 0{,}876}\,\bar{x}$$

$$\tilde{g} \to g_1: \quad 0{,}8\,y = 5{,}34\,\frac{x}{6} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{1{,}113}_{\neq 0{,}667}\,x$$

Erwartungsgemäß ist eine Rücktransformation weder von den einheitenfreien Ergebnissen auf die Geradengleichung der einheitenbehafteten Daten noch zwischen den beiden einheitenfreien Resultaten möglich. Diese Eigenheiten entsprechen denen des Beispiels 4.1.

Diskussion der Ergebnisse zu den Beispielen 4a, b

Die „konventionelle" Regressionsberechnung führt zu zwei Geraden, g_y und g_x, die entsprechend der Güte der Korrelation voneinander abweichen. Ergibt sich aus der Art des untersuchten Problems eine sinnvolle Zuordnung, welche der beiden Variablen die unabhängige und welche die abhängige Variable ist, so wird in der Regel die Gerade g_y, d. h. $y = f(x)$, als beschreibende Funktion verwendet.

Im vorliegenden Beispiel ist diese Zuordnung jedoch nicht eindeutig gegeben. Ob aus dem Gewicht einer Schlange auf deren Länge oder ob umgekehrt aus der Länge auf das Gewicht geschlossen wird, erscheint gleichwertig. Deshalb wurde der Versuch gemacht, eine einzige Gerade aus der Bedingung zu ermitteln, dass die Summe der Fehlerquadrate *senkrecht zur endgültigen Regressionsgeraden* minimal wird. Aus der Einheitenanalyse ergibt sich allerdings sofort, dass ein solches Vorgehen a priori nur möglich ist, wenn die Daten $x_i\,;\; y_i$ gleiche Einheiten aufweisen, was die Anwendungsgebiete dieser Methode stark einschränkt. In allen anderen Fällen ergibt sich ein „Einheiten-Mischmasch". Auch eine Normierung auf einheitenfreie Daten kann das Problem nicht lösen, da eine Renormierung vollkommen willkürlich ist. [1)]

Als Ausweg bietet sich für die in diesem Beispiel beschriebenen Problemklasse an, die Geraden g_y und g_x zu mitteln (hier z. B. das arithmetische Mittel der Steigungen zu bilden):

$$\left.\begin{array}{ll} g_y: & y = 0{,}5\,x \\ g_x: & x = 0{,}857\,y \;\Leftrightarrow\; y = 1{,}167\,x \end{array}\right\} \quad g_a: \quad y = \tfrac{1}{2}\,(0{,}5 + 1{,}167)\,x = \underbrace{0{,}833}_{\neq 0{,}730}\,x$$

Das Ergebnis unterscheidet sich von dem oben ermittelten, was aber kein grundsätzlicher Mangel ist. Wird die Regressionsgerade nicht nach dem Fehlerquadratprinzip berechnet, sondern z. B. nach Tschebyschew unter Minimierung der Beträge der Fehler, so ergibt sich ein wiederum anderes Resultat. Für die Beurteilung, welches der drei Ergebnisse „am besten" ist, gibt es kein objektives Kriterium; beide Ergebnisse (Gauß und Tschebyschew) sind jedoch korrekt und in sich schlüssig.

---

1) In gewissen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften wird die Methode trotzdem verwendet. Für diesen Hinweis und weitere Diskussionen bin ich Prof. Frank Hampel, ETH Zürich, zu Dank verpflichtet.

5 Zusammenfassung

Die vorangegangenen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Einheitenanalyse auf besonders einfache Weise grundsätzlich darüber Auskunft gibt, ob Aufgabenstellungen und Lösungsansätze sowie geometrische Deutungen mathematischer Probleme a priori überhaupt möglich sind.

Als Ergebnis bleibt festzuhalten:

- Die geometrische Deutung mathematischer Ausdrücke (wie Steigungswinkel und Krümmung) ist im Allgemeinen nur möglich, wenn die Einheiten der Variablen x und y gleich sind. Entsprechendes gilt für die Länge eines Kurvenstücks, den Abstand von Punkten und die Zerlegung von Vektoren in Komponenten.
- Eine Transformation auf einheitenfreie Größen kann das Problem nicht umgehen. Je nach Wahl der für eine solche Normierung gewählten Bezugsgrößen liefert die Rücktransformation beliebige Ergebnisse. Es gibt kein objektives Kriterium für die Auswahl der Bezugsgrößen und die Wertung der Ergebnisse.
- Transformationen, Normierungen und Fehlerbetrachtungen sind bei einheiten-behafteten Variablen getrennt für jede Variable (also z. B. getrennt in x- und in y- Richtung) vorzunehmen.
- Eine Drehung des Koordinatensystems ist nicht möglich, wenn die Einheiten der Variablen unterschiedlich sind. Eine Parallelverschiebung bereitet hingegen keine Probleme.

6 Schlussbemerkung

Dass die Einheitenanalyse darüber hinaus in Physik, Technik und in allen Bereichen der angewandten Mathematik ein gar nicht zu überschätzendes universelles Werkzeug ist, soll die folgende Zusammenstellung deutlich machen :

- Aufdeckung von Druckfehlern in Fachveröffentlichungen und Formelsammlungen
- Analyse der Struktur von Gleichungen und Termen
- einfache Überprüfung, ob Aufgabenstellungen und Lösungsansätze überhaupt sinnvoll sind
- Klärung des Bezugs von (physikalischen, baustatischen, finanzmathematischen usw.) Größen (z. B. der Frage, ob elastische Bettungs-, Verschiebungsfeder- bzw. Drehfederwerte auf Punkte, Linien oder Flächen bezogen sind; klare Unterscheidung von Einzel-, Linien- und Flächenlasten; Einheitskosten je Stück/ je Zeiteinheit / je Maschinentakt usw.)
- Nachvollziehen komplizierter Herleitungen
- Kontrolle von Berechnungsabläufen

Der (Bau-)Ingenieur muss in besonders hohem Maße die Richtigkeit seiner Berechnungen garantieren. Falsche Ergebnisse führen zu Bauwerksschäden oder -einstürzen, zu nicht kostendeckenden Angeboten, zu falsch dimensionierten Verkehrswegen und Wasserstraßen. Hieraus können sich zivil- und strafrechtliche Folgen ergeben, die die Existenz eines Ingenieurbüros oder einer Baufirma gefährden. Zu bedenken ist auch der Ansehensverlust, den ein Ingenieur durch fehlerhafte Berechnungen erleidet.

Es ist deutlich zu erkennen, dass Einheitenkontrollen besonders einfach und gleichzeitig eminent leistungsfähig sind. Deshalb sollten diese Kontrollen jede Ingenieurberechnung permanent begleiten. Als weitere besonders wirkungsvolle Kontrollen sind Überschlagsberechnungen und – für einen Ingenieur selbstverständlich – anschauliche Plausibilitätskontrollen zu nennen. Hingegen vernebelt eine allzu genaue Zahlenrechnung die wesentlichen Zusammenhänge, oder, um C.F. Gauß zu zitieren:

„In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr
als in einer übertrieben genauen Rechnung."

Dem soll an dieser Stelle abschließend hinzugefügt werden:

„Einheitenkontrollen haben für den Ingenieur
den Rang einer Lebensversicherung.